

КРУЖОК ПО МАТЕМАТИКЕ. ЗАНЯТИЕ 9.

Разбор ДЗ

- Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, – фальшивые и что каждая фальшивая монета легче настоящей. Объясните, как найти две фальшивые монеты за одно взвешивание на чашечных весах без гирь. (Все фальшивые монеты весят одинаково.)

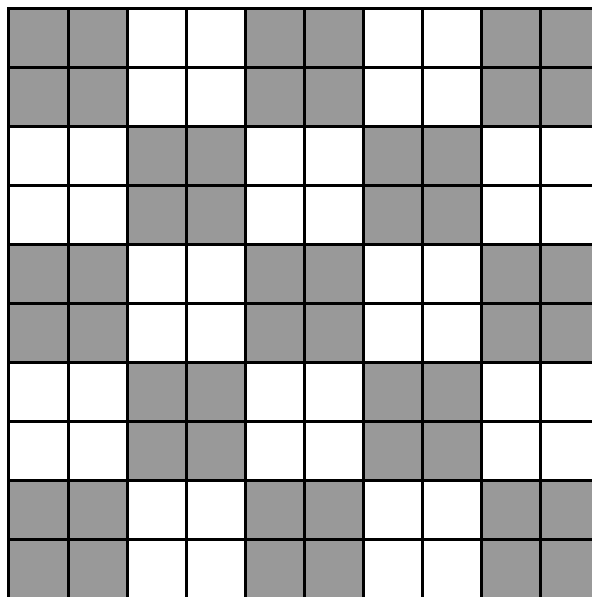
Разбор ДЗ

- На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?



Разбор ДЗ

- Можно ли шашечную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4 ?



Разбор ДЗ

- Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. В начале имеется набор чисел 2021, 2022, 2023. Может ли через некоторое время получиться набор 2022, 2023, 2024?

Разбор ДЗ

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 2023-го дня.

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

где n – количество чисел в ряду

x_1, x_2, \dots, x_n – числа ряда

h – среднее гармоническое

Метод математической индукции

- Пусть дана последовательность пронумерованных утверждений или выражений N_1, N_2, \dots, N_k (конечная или бесконечная). Мы сможем доказать все эти утверждения, если докажем, что:
 - 1) N_1 — верно;
 - 2) Если истинно N_k , то истинно и N_{k+1} (для любого натурального номера k).
- Действительно, в этом случае истинно первое утверждение (п.1), тогда по п.2 истинно и второе, а значит, и третье, и т.д.
- Этот метод доказательства последовательности утверждений называется методом математической индукции. Он состоит из двух вышеуказанных этапов. Первый из них называется **база индукции**, а второй — **переход индукции** или шаг индукции.

Метод математической индукции

- Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ для любого натурального n .
- Докажите неравенство $2^n > n$ для произвольного натурального n .
- Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ для всех натуральных n .

Метод математической индукции

- Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что любые две граничащие (то есть имеющие общую сторону) части будут раскрашены в разные цвета.
- Найдите все натуральные n , при которых $2n$ не больше, чем n^2 .
- Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

Метод математической индукции

- n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $1/n$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.

Метод математической индукции

- У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

Спасибо за внимание!

