

# ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ  
РОССИЙСКИХ И  
ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И  
ОЛИМПИАД

# Ахиллес и черепаха

Рассмотрим утверждение:

Пусть верно  $A$  и  $A \implies B$ .

Тогда верно и  $B$ .

# Ахиллес и черепаха

## Утверждение С:

Пусть верно  $A$  и  $A \implies B$ .

Тогда верно и  $B$ .

# Ахиллес и черепаха

## Утверждение D:

Пусть верно  $A$  и  $A \implies B$  и утверждение  $C$ .  
Тогда верно и  $B$ .

# Ахиллес и черепаха

## Утверждение ...:

Пусть верно  $A$  и  $A \implies B$  и утверждение  $C$  и утверждение  $D$  и  
...

Тогда верно и  $B$ .

# ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

"Пусть верно  $A$  и  $A \implies B$ .  
Тогда верно и  $B$ ."

Можно записать как:

$$A, A \implies B \vdash B$$

# Раскраски

1. От шахматной доски отпилили две соседних угловых клетки. Можно ли оставшийся кусок доски распилить на 31 доминошку (прямоугольники  $1 \times 2$ )?
2. От шахматной доски отпилили две противоположных угловых клетки. Можно ли оставшийся кусок доски распилить на 31 доминошку?
3. Раскрасьте 6 клеток белой доски  $4 \times 4$  в чёрный цвет так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали было чётное число белых клеток.

4. а) Раскрасьте шахматную доску в чёрный и белый цвета так, чтобы любые две соседние клетки, лежащие на одной горизонтали, были разного цвета, а лежащие на одной вертикали — одного и того же цвета.
- б) Можно ли распилить шахматную доску на  $32 \frac{3}{4}$  доминошки; так, чтобы среди них было 11 вертикальных и 21 горизонтальная?
5. Раскрасьте все клетки доски  $4 \times 4$  в четыре разных цвета так, чтобы каждый прямоугольник  $1 \times 4$  и каждый квадрат  $2 \times 2$ , кроме центрального, были раскрашены во все четыре цвета.

6. а) Раскрасьте все грани куба в чёрный и белый цвета так, чтобы каждая белая грань граничила с ровно с двумя чёрными, а каждая чёрная — ровно с двумя белыми.
- б) Раскрасьте все вершины куба в чёрный и белый цвета так, чтобы из каждой белой вершины можно было пройти по ребру ровно в две чёрных, а из каждой чёрной — ровно в две белых.
- в) Раскрасьте все рёбра куба в чёрный и белый цвета так, чтобы каждое белое ребро было соединено ровно с двумя чёрными, а каждое чёрное — ровно с двумя белыми.

# Домашнее задание

Раскрасьте все клетки доски  $4 \times 4$  в чёрный и белый цвета так, чтобы

а) каждая белая клетка граничила ровно с одной чёрной, а каждая чёрная — ровно с одной белой;

б) каждая белая клетка граничила ровно с двумя чёрными, а каждая чёрная — ровно с двумя белыми;

в) каждая белая клетка граничила ровно с одной чёрной, а каждая чёрная — ровно с тремя белыми.