ОКСБРИДЖ АЛЬБИОН

ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ РОССИЙСКИХ И ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@albioncom.ru

Занятие №7 (18.11.2023)

Кружок по математике

Несколько слов о домашнем задании

Задача №1. В подвале у людоеда

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин? б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Задача №1. В подвале у людоеда

Решение:

а) На завтрак людоед может предпочесть любого из 25 человек, на обед – любого из 24 оставшихся, а на ужин – кого-то из 23 оставшихся счастливчиков. Всего получаем $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способов.

б) Заметим, что в предыдущем пункте каждую тройку пленников мы посчитали $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ раз. Поскольку теперь их порядок нам неважен, то ответом будет число $13800 : 6 = 2300$.

Задача №2. Экзамен по комбинаторике

Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Сочетания

Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \leq n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через $\boldsymbol{C_n^k}$.

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего k элементов, можно с помощью перестановок получить k! упорядоченных выборок объема k, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Задача №2. Экзамен по комбинаторике

Решение: Способы выбрать задачи для первого варианта - C_{28}^{7}

После этого останется 21 задача, соответственно, выбрать второй вариант можно C_{21}^{7} способами

Третий - C_{14}^{7}, четвертый – C_{7}^{7}=1 способ

По правилу произведения получаем $C_{28}^{7}C_{21}^{7}C_{14}^{7}C_{7}^{7}$ способов

! Но варианты равноправны и полученное число нужно разделить на 4!

Ответ: $\frac{C_{28}^{7}C_{21}^{7}C_{14}^{7}C_{7}^{7}}{4!}$

Блиц-задача

Ребус

В равенстве 101 – 102 = 1 передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

Седьмое занятие.
Теория вероятностей

Из прошлого теории вероятности

Ещё первобытный вождь понимал, что у десятка охотников «вероятность» поразить копьем зубра гораздо выше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Несомненно, древние полководцы на основании наблюдений и опыта военного руководства умели как-то оценить «вероятность» своего возвращения «на щите». Но они всё ещё были далеки от теории вероятностей.

По мере развития люди всё чаще стали планировать случайные события – наблюдения и опыты, классифицировать их как невозможные, возможные и достоверные. Оказалось, случайностями нередко управляют объективные закономерности.

Из прошлого теории вероятности

Кто и когда впервые проделал опыт с монеткой – неизвестно.

Многие учёные проводили эксперимент. При многократном бросании монеты подсчитывалось число выпадений орла. Результаты этих опытов показаны в таблице:

Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла	Фамилия	Кол-во бросков	Частота выпадений орла
Бюффон	4040	0,507	Романовский	80640	0,4923
Де Морган	4092	0,5005	Пирсон К.	24000	0,5005
Джевонс	20480	0,5068	Феллер	10000	0,4979

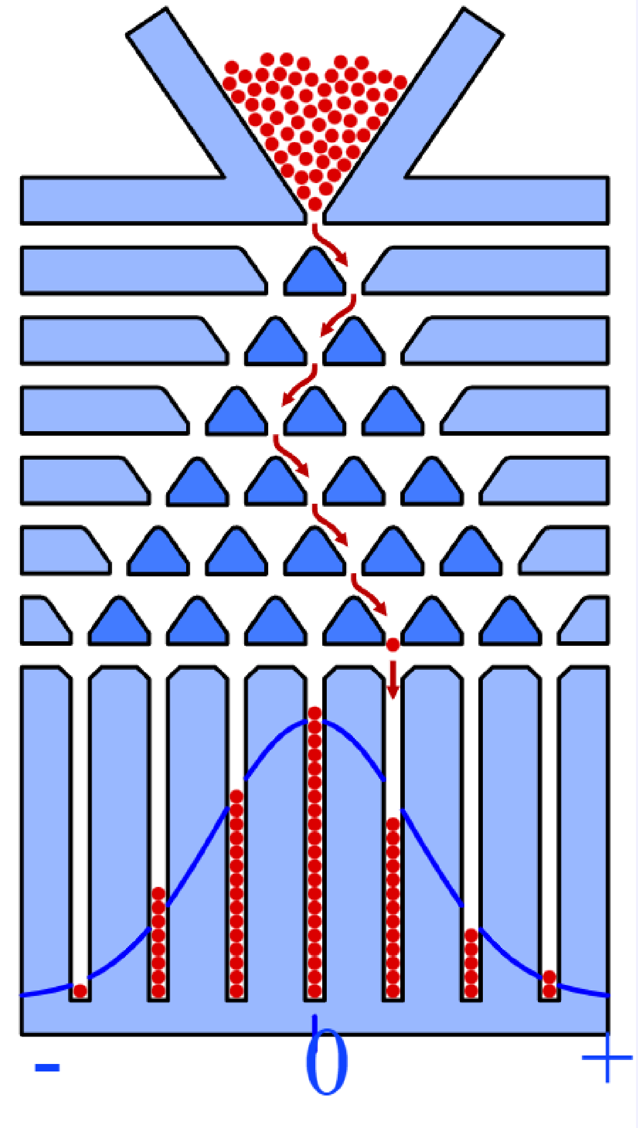
Из таблицы видно, что выпадение орла во всех случаях близко к ½.

Из прошлого теории вероятности

Швейцарский математик Яков Бернулли (Jacob Bernoulli, 27.12.1654-16.08.1705) в своём знаменитом труде «Искусство предположений» («Ars Conjectandi»), опубликованном в 1713 году (но написанном гораздо раньше), пишет:

> «…если кто-либо будет рассматривать состояние погоды за очень большое число истекших годов и будет отмечать, сколько раз она была ясной или дождливой, или кто-либо очень часто будет присутствовать при игре двоих и наблюдать, сколько раз тот или другой оказывается в игре победителем, то тем самым откроет отношение, в котором вероятно находятся числа случаев, когда то же событие при обстоятельствах, подобных прежним, и в будущем может случиться или не случиться. Этот опытный способ определения числа случаев по наблюдениям не нов и не необычен... и то же все постоянно соблюдают в повседневной практике.»

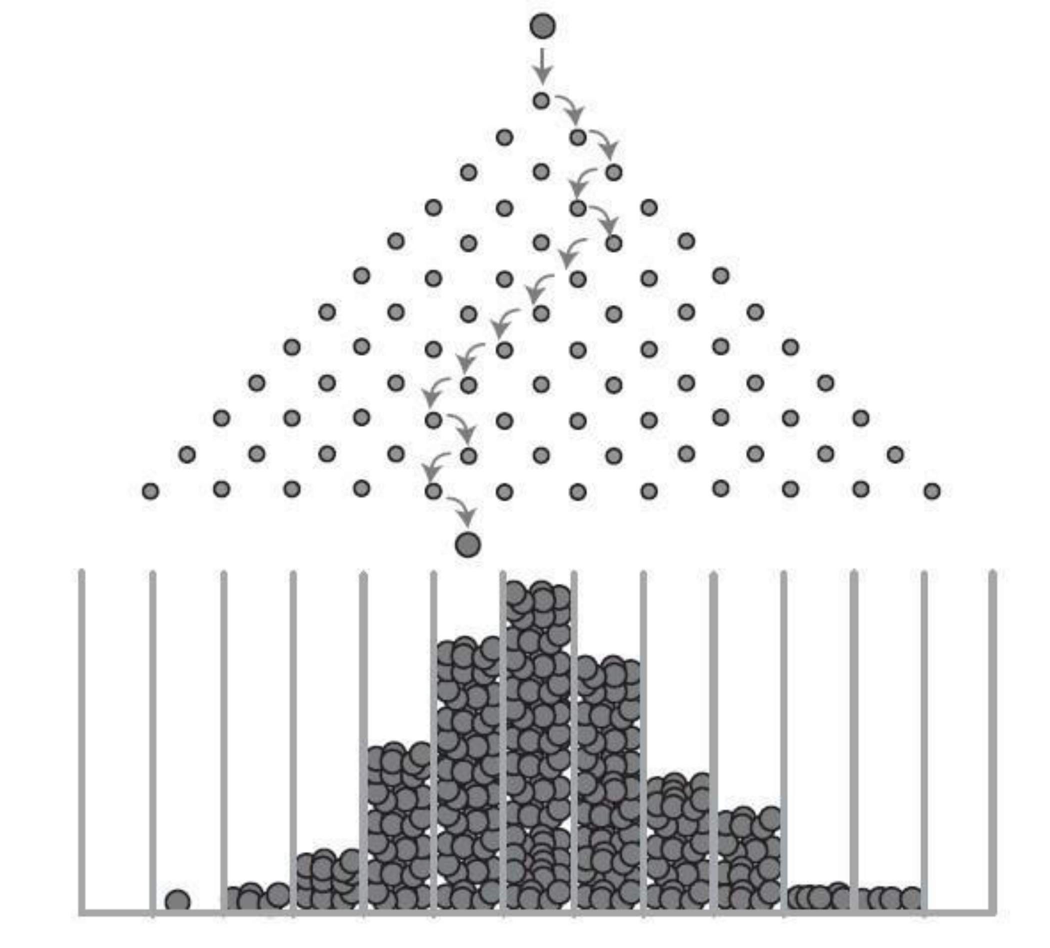
Из прошлого теории вероятности



Доска Гальтона — устройство, изобретённое английским учёным Фрэнсисом Гальтоном (первый экземпляр изготовлен в 1873 году, затем устройство было описано Гальтоном в книге *Natural inheritance*, изданной в 1889 году) и предназначающееся для демонстрации центральной предельной теоремы.

Доска размещена вертикально. Из верхнего резервуара стальные шарики катятся вниз и накапливаются в нижних гнездах. Каждый шарик встретив на своём пути очередное препятствие, отклоняется или влево, или вправо, а затем падает вниз.

Из прошлого теории вероятности



Эксперимент с доской Гальтона. Правильное расположение шариков (симметричное, при котором в центральных гнездах их много, а в крайних мало) повторяется от эксперимента к эксперименту. Это свидетельствует о существовании объективного закона их распределения.

Когда шариков много, то говорят, что они *распределены по нормальному закону*.

Из прошлого теории вероятности

Первые задачи вероятностного характера возникли в различных азартных играх — костях, картах и др.

К азартным играм относили бросание шестигранных игральных костей. Слово «азар» по-арабски означает трудный. Так, арабы называли азартной игрой комбинацию очков, которая при бросании нескольких костей могла появится единственным способом.

Что будет «азаром» при бросании двух костей?

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Задание. Монету подбросили 2 раза. Вычислите вероятность, что выпадет 2 решки.

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Задание. Вычислите вероятность, что при бросании двух костей выпадет 8 очков.

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Вероятность любого события заключена *между нулём и единицей*. Вероятность равна нулю, если благоприятных исходов нет вовсе (*невозможное событие*). Вероятность равна единице, если все исходы благоприятны (*достоверное событие*).

Пусть у нас есть колода карт, и мы достаем из неё одну карту.

Достоверное событие – мы вытащили любую карту любой масти.

Невозможное событие – мы вытащили проездной на метро.

Случайное событие – мы вытащили туза.

Теория вероятностей

Упражнение. Какие (случайными, достоверными или невозможными) являются следующие события:

1. Два попадания при трех выстрелах.
2. Появление не более 18 очков при бросании трех игральных костей.
3. Наугад выбранное трехзначное число не больше 1000.
4. Появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м.
5. Появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр.

Множества элементарных исходов

Допустим при бросании игральной кости нас интересует появление определенного числа очков.

Выпадение конкретного числа очков i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) мы называем *элементарным исходом* (e_i).

Осуществление одного элементарного события в качестве результата испытания, исключает другие.

При бросании игральной кости непременно произойдет одно из элементарных событий:

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

Все элементарные исходы образуют *множество (пространство) элементарных исходов E*. E – достоверное событие.

Операции над событиями

По мишени произведено 4 выстрела. Рассмотрим события:

A_0 – попаданий нет

A_1 – одно попадание

A_2 – два попадания

A_3 – три попадания

A – не больше трех попаданий

Заметим, что $A_0 \subset A,\ A_1 \subset A,\ A_2 \subset A,\ A_3 \subset A$

При этом событие A не содержит никаких других событий кроме A_0, A_1, A_2, A_3

Операции над событиями

Определение. *Суммой событий* A_1, A_2, A_3, …, A_n называется событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, …, A_n (или A_1, или A_2, или A_3, …, или A_n, или несколько из них, или все)

Упражнение. Событие A – лотерейный выигрыш 100 рублей

Событие B – лотерейный выигрыш 200 рублей

Событие C – лотерейный выигрыш 250 рублей

В чем состоит событие A+B+C?

Операции над событиями

Произвольно выбираем два двухзначных числа.

А – выбранные числа кратны 2

В – выбранные числа кратны 3

С – выбранные числа кратны 6

Заметим, что событие С происходит, если одновременно происходят события А и В. Если одно из событий не произойдет, то не произойдет и С. Такое событие С принято называть *произведением* событий А и В.

Операции над событиями

Определение. *Произведением событий* A_1, A_2, A_3, …, A_n называется событие А, состоящее в одновременном исполнении всех событий (и A_1, и A_2, и A_3, …, и A_n) A_1, A_2, A_3, …, A_n.

А – входящий в подъезд человек – мужчина

В - входящий в подъезд человек светловолосый

С - входящий в подъезд человек – светловолосый мужчина

С = А*В

Несовместные события

Рассмотрим события:

A – выпадение орла при первом бросании монеты

B – выпадение решки при первом бросании монеты

Заметим, что совместное осуществление этих событий невозможно

Определение. Два события A и B, произведение которых – невозможное событие, называются *несовместными событиями*.

Несовместные события: $A \cap B = \emptyset$ (пустое множество) — события A и B не могут произойти одновременно.

Противоположные события

Определение. Если сумма событий A и B – достоверное событие, а произведение – невозможное событие, события A и B называются *противоположными*.

$$B = \overline{A} \text{ или } A = \overline{B}$$

Бросаем игральный кубик

a) Какова вероятность выкинуть на игральном кубике чётное число?

b) А число, не превосходящее четырёх?

Трёхтомник

На полке стоят 40 книг. Среди них есть трёхтомник Пушкина (три книги). Какова вероятность того, что эти три тома стоят в правильном порядке?

Колода карт

Герман тянет три карты из тщательно перемешанной колоды в 52 карты. С какой вероятностью он вытянет тройку, семёрку и туза (любых мастей):

a) подряд;

b) в произвольном порядке?

На экзамене

На экзамене есть 25 вопросов, случайным образом выбираются два из них. Какова вероятность

a) получить вопросы №1 и №2?

b) получить вопрос №3?

Вероятность суммы несовместных событий

Если A и B несовместны, формула сложения вероятностей : **$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$**

(несовместные = события A и B не могут произойти одновременно)

Задача. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлены: 10 выигрышей по 200 рублей, 100 – по 100 рублей, 500 – по 25 рублей и 1000 выигрышей – по 5 рублей. Федя купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 25 рублей?

Вероятность суммы совместных событий

Формула сложения вероятностей: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Задача. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность выпадения хотя бы одного орла?

Бросаем кубик

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Теория вероятностей

Чему равна вероятность $P(\overline{A})$, если $P(A) = p$, $0 \leq p \leq 1$?

На экзамене

На экзамене есть 25 вопросов, случайным образом выбираются два из них. Какова вероятность

с) не получить вопрос №25?

Условные вероятности

Из ящика в котором a белых и b черных шаров, наугад вынимаются последовательно один за другим два шара.

A – первый шар белый

B – второй шар белый

Понятно, что $P(A) = \frac{a}{a+b}$

Какова вероятность события B, если A произошло?

Какова вероятность события B, если A не произошло?

Условные вероятности

Мы столкнулись с ситуацией, когда вероятность события В зависит от того произошло или не произошло А.

В таком случае говорим, что событие В зависит от события А, а вероятность появления события В *условная.*

Условная вероятность появления события В, если событие А произошло, будем обозначать **Р(В/А).**

Условные вероятности

Пусть из n равновозможных событий A_1, A_2, A_3, …, A_n составляющих полную группу (полная группа событий – это совокупность единственно возможных событий при данном испытании):

Событию A благоприятствует m событий

Событию B благоприятствует k событий

Событию AB благоприятствует r событий

$r \leq k$, $r \leq m$

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Условные вероятности

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

a белых и b черных шаров

Из ящика в котором a белых и b черных шаров, наугад вынимаются последовательно один за другим два шара. Какова вероятность, что они оба белые?

Снова колода карт

Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают 2 карты. Найти вероятность того, что:

а) достали 2 вальта

б) достали 2 карты пиковой масти

в) достали вальта и даму

В трамвайном парке

В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Вероятность произведения независимых событий

Событие В называется ***независимым*** от А, если его вероятность не зависит от того, произошло или не произошло событие А.

$$\boldsymbol{P(B/A) = P(B)}$$

В случае независимости события В от события А из ранее установленной формулы получим:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(B) \cdot P(A)}$$

Вероятность произведения двух *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий.

Снова бросаем кости

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй пяти очков?

Три независимых события

A, B, C – совместимые и независимые события.
Доказать, что $\mathrm{P(ABC)} = \mathrm{P(A)} \cdot \mathrm{P(B)} \cdot \mathrm{P(C)}$

Вероятность произведения независимых событий

Рассмотрение этого примера подводит к обобщению правила умножения вероятностей для произвольного числа событий. В случае независимости событий соответствующая формула принимает вид:

$$\boldsymbol{P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ \dots\ \cdot P(A_n)}$$

Три монеты

Подбрасывают три монеты. Найти вероятность выпадения орлов на всех трех монетах.

Спасибо за внимание!

Совсем скоро презентация и домашнее задание появятся на гугл-диске и на сайте)
Домашнее задание присылайте на почту - info@oxbridge.ru
В теме письма указывайте фамилию, предмет и номер группы
Не забудьте отправить ДЗ не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Хороших выходных!

Использованные материалы

- В.С. Лютикас, "Школьнику о теории вероятностей«
- Г.И. Фалин, “Статистический эксперимент де Бюффона” (лекция для участников финального тура IX Олимпиады по теории вероятностей, 20 февраля 2016 г.)
- Архив занятий Малого Мехмата МГУ http://mmmf.msu.ru/archive/
- Задачи с сайта https://problems.ru/
- А. Шень, “Вероятность: примеры и задачи”