

# КРУЖОК ПО МАТЕМАТИКЕ. ЗАНЯТИЕ 3.

# Давайте познакомимся

- **Мария Артёмовна**  
([masha.sham1@yandex.ru](mailto:masha.sham1@yandex.ru))
- **Студентка 3 курса**  
**Химического факультета**  
**МГУ им. М. В. Ломоносова**
- **Победитель турнира**  
**городов, призер**  
**Московской**  
**математической регаты и**  
**турнира Архимеда**
- **Люблю химию,**  
**математику,**  
**путешествовать и**



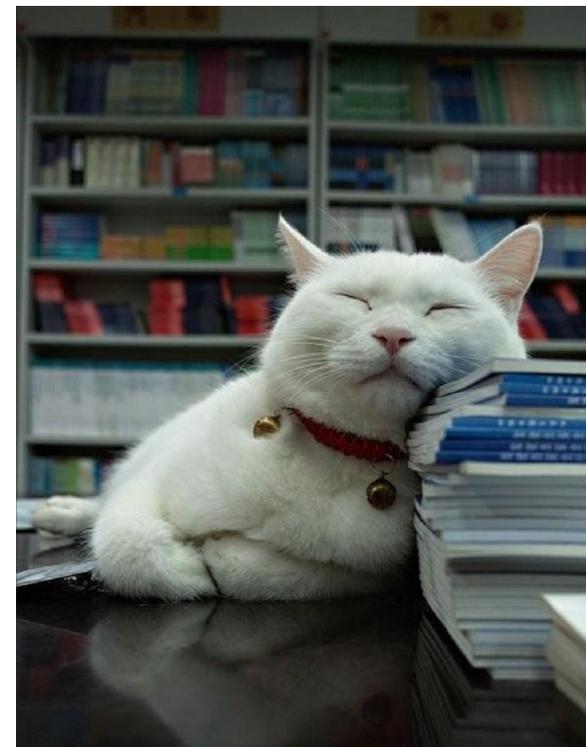
# Из чего будет состоять наше обучение?

- Основные занятия (обсуждаем вопросы, тренируемся решать задачи)
- Домашняя работа с проверкой (самостоятельно решаем интересные задачки дома)
- Игровые занятия (командные соревнования по математике)



# Темы будущих занятий

- Рыцари и лжецы
- Делимость
- Принцип Дирихле
- Графы
- Инварианты
- Комбинаторика
- Математическая индукция



# Большой разбор ДЗ

- Врун всегда лжёт, Хитрец говорит правду или ложь, когда захочет, а Переменчик говорит то правду, то ложь попеременно. Путешественник встретил Вруна, Хитреца и Переменчика, которые знают друг друга. Сможет ли он, задавая им вопросы, выяснить, кто есть кто?
- *Спросим каждого из них по два раза: "Ты Врун?". Врун ответит: "нет, нет", а Переменчик ответит: либо "да, нет", либо "нет, да". Есть три возможных ответа Хитреца.*
  - 1) *"Да, да". Тогда мы сразу узнаём, кто есть кто.*
  - 2) *"Нет, нет". Тогда мы знаем, кто Переменчик и какой из двух его ответов правдив. Зададим Переменчику вопрос: "Он Врун?", указав на одного из двух оставшихся. Так как мы уже знаем, ответит ли Переменчик правду на третий вопрос, то мы поймём, кто из двоих Врун, а, значит, и кто из них Хитрец.*
  - 3) *"Да, нет" или "нет, да". Тогда мы знаем, кто Врун. Зададим Вруну вопрос: "Он Хитрец?", указав на одного из двух оставшихся. По его ответу мы узнаем, кто из двоих Хитрец, а, значит, и кто из них Переменчик.*

# Большой разбор ДЗ

- Про группу из пяти человек известно, что:  
Алеша на 1 год старше Алексеева,  
Боря на 2 года старше Борисова,  
Вася на 3 года старше Васильева,  
Гриша на 4 года старше Григорьева,  
а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев.  
Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев



- *Сумма возрастов Алеша, Бори, Васи, Гриши и Димы равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева. Значит, Дмитриев старше Димы на  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  лет.*

# Большой разбор ДЗ

- **Задача-парадокс.** Фред приносит домой 100 фунтов картофеля, которые на 99 процентов состоят из воды. Он оставляет их на ночь сушиться снаружи, так, что те содержат 98 процентов воды. Каков их новый вес?
  - *100 кг картофеля, 99 % воды (по массе), означает 99 кг воды и 1 кг сухого остатка. Это соотношение 1:99.*
- Если количество воды уменьшится до 98 %, сухое вещество составляет 2 % от массы. Соотношение 2:98 уменьшается до 1:49. Поскольку сухое вещество по-прежнему весит 1 кг, вода должна весить 49 кг, что даёт в ответе суммарно 50 кг.*



## Двенадцать и одна

Великий султан Квазиабали ибн-аль-Каз сидел в своей сокровищнице, с удовольствием взирая на выстроенные в ряд у стены двенадцать больших кожаных мешков, набитых большими серебряными монетами. В мешках были подати, собранные эмиссарами султана в двенадцати провинциях, которыми он правил. На каждом мешке было отчетливо написано имя сборщика податей — эмиссара соответствующей провинции. Одна монета весила целый фунт<sup>1</sup>, а так как все мешки были почти полными, то серебра было собрано много.

Внезапно дверь в сокровищницу отворилась, и стража ввела какого-то человека в лохмотьях, который бросился перед султаном на колени.

— Государь, — воскликнул он, воздев руку, — я пришел, чтобы сообщить тебе нечто очень важное.

— Говори, — повелел ибн-аль-Каз.

— Я состою на службе у одного из твоих эмиссаров, о, государь, и как твой верноподданный хочу сообщить о совершенном им предательстве и злодеянии. В мешке с присланными им податями каждая монета содержит на целую унцию меньше серебра, чем положено. Я сам был одним из тех, кто тер монеты грубой тканью до тех пор, пока каждая из них не полегчает ровно на одну унцию серебра. А поскольку мой хозяин несправедливо обошелся со мной, я решил поведать тебе истину.

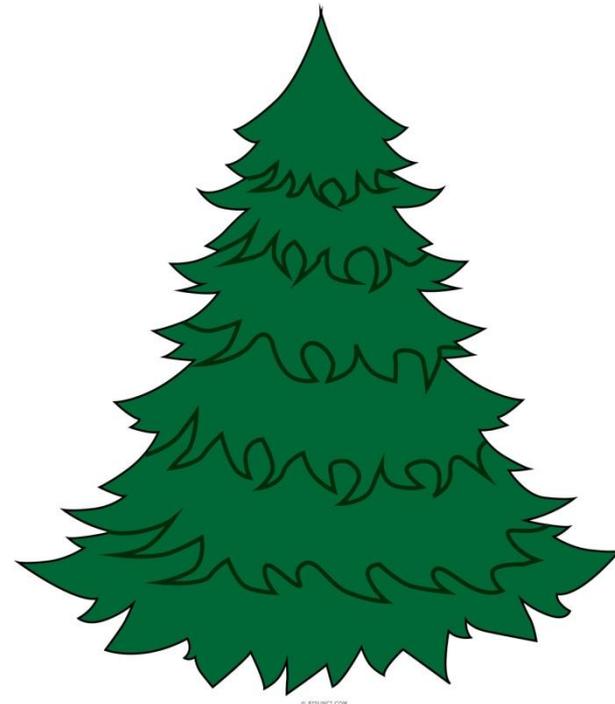
— Кто твой хозяин? — спросил ибн-аль-Каз, грозно нахмурясь, — клянусь Аллахом, что завтра же ему отрубят голову, а ты получишь большую награду!

— Мой хозяин... — начал было человек в рубище. Но в этот момент кинжал, брошенный чей-то рукой, просвистел в воздухе и поразил говорившего в спину. Тот упал замертво.

Возможно, кому-нибудь покажется несложным делом определить, в котором из двенадцати мешков содержатся облегченные монеты, если бы у султана были достаточно точные весы, которые позволили бы отличить полновесные монеты в 16 унций серебра и облегченные монеты в 15 унций серебра. У султана, действительно, были такие весы, и он их очень любил. Их изготовил по его заказу лучший специалист по точным измерительным приборам в Соединенных Штатах Америки, и были они сделаны по образу и подобию весов, которые в этой высокоразвитой индустриальной стране встречаются буквально на каждом шагу. У весов была платформа, на которую ставили взвешиваемый груз, и прорезь, в которую нужно было опустить монету в один пенни. Вместо того чтобы показывать вес стрелкой на шкале, весы отпечатывали чек с указанием точного веса в фунтах и унциях и полным предсказанием судьбы на обороте. Беда была в другом: среди всех сокровищ у султана ибн-аль-Каза была *только одна* американская монетка достоинством в один пенни. На платформу весов султан мог выложить серебряные монеты из всех мешков в любом ассортименте, но получить он мог только один чек с напечатанным точным весом всех монет на платформе.

# Большой разбор ДЗ

- В лесу растут миллион ёлок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что есть две ёлки с одинаковым количеством иголок.



# Большой разбор ДЗ

- Обязательно ли среди двадцати пяти «медных» монет (т. е. монет достоинством 1, 2, 3, 5 коп.) найдётся семь монет одинакового достоинства?
- *Да. Если бы каждого из четырех типов монет было не более 6, то всего монет было бы не более  $6 \times 4 = 24$ , а их 25.*

# Большой разбор ДЗ

- Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).
- Пусть в компании  $n$  человек. Тогда у каждого человека имеется от  $0$  до  $n - 1$  друзей. Таким образом, количество друзей может принимать  $n$  различных значений:  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Поэтому если бы  $n$  человек имели различное число друзей, то в компании присутствовало бы по одному человеку, имеющему  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  друзей. С другой стороны, если есть человек, имеющий  $n - 1$  друга, то он дружит со всеми, следовательно, нет человека, который имеет  $0$  друзей. Противоречие.

# Комбинаторика

- **Правило суммы.** Если два действия  $A$  и  $B$  взаимно исключают друг друга, причем действие  $A$  можно выполнить  $m$  способами, а  $B$  –  $n$  способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо  $A$ , либо  $B$ ) можно  $n + m$  способами.
- **В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?**

# Комбинаторика

- **Правило произведения.** Пусть требуется выполнить последовательно  $k$  действий. Если первое действие можно выполнить  $n_1$  способами, второе действие  $n_2$  способами, третье –  $n_3$  способами и так до  $k$ -го действия, которое можно выполнить  $n_k$  способами, то все  $k$  действий вместе могут быть выполнены:

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$$

# Правило произведения

- В классе учатся 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить двух дежурных?



# Футбольная команда

- В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?



# Монетка

**Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?**



# Перестановки без повторений

- Сколькими способами можно расставить 4 различных книги на полке в ряд? А 2 одинаковых словаря, книгу по химии и книгу по биологии?



# Перестановки с повторениями

- Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов
  - а) ВЕКТОР;
  - б) ЛИНИЯ;

$$\bar{P}_{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

# Спасибо за внимание!

