ОКСБРИДЖ АЛЬБИОН

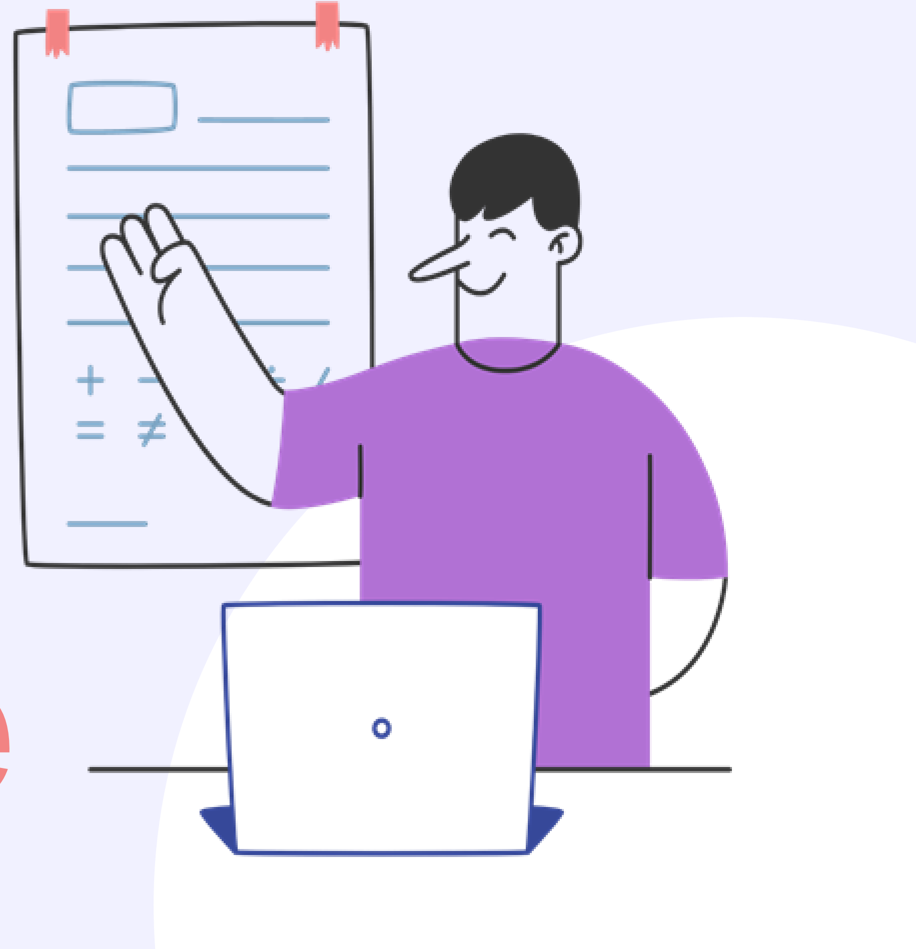
ЗАОЧНАЯ ФИЗМАТШКОЛА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАНИЯ РОССИЙСКИХ И ЗАРУБЕЖНЫХ ЭКЗАМЕНОВ И ОЛИМПИАД

+7 495 650-99-95
+7 495 694-36-00
+7 925 505-24-42
+7 916 151-25-94
info@albioncom.ru

Занятие №8 (25.11.2023)

Кружок по математике



Несколько слов о домашнем задании

Задача №1. Номер телефона

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Задача №2. Игральный кубик

Игральный кубик бросают 2 раза.

а) Какова вероятность того, что оба раза выпала единица?

б) С какой вероятностью выпавшие числа будут отличаться на 3?

Задача №3. Жеребьевка

В соревнованиях по плаванию участвуют 4 спортсмена из Германии, 6 спортсменов из Италии, 7 спортсменов из России и 5 из Китая. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что спортсмен из Италии Джованни Лучио будет выступать первым, вторым или третьим.

Задача №3. Жеребьевка

Решение: Здесь мы сразу видим союз «или» в формулировке задачи «найти вероятность, что спортсмен будет выступать или первым или вторым или третьим». Этот союз означает сложение следующих событий:

A: Джованни Лучио будет выступать первым;

B: Джованни Лучио будет выступать вторым;

C: Джованни Лучио будет выступать третьим.

Задача №3. Игральный кубик

Решение: Так как речь идет о конкретном спортсмене, то число благоприятных исходов для него, равно $m=1$. Всего же равновероятных исходов $n=22$. Получаем вероятности появлений событий A, B и C:

$$P(A) = P(B) = P(C) = m/n = 1/22$$

Учитывая, что эти события несовместны (Джованни Лучио не может одновременно выступать на двух местах), получаем значение искомой вероятности:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = \mathbf{3/22}$$

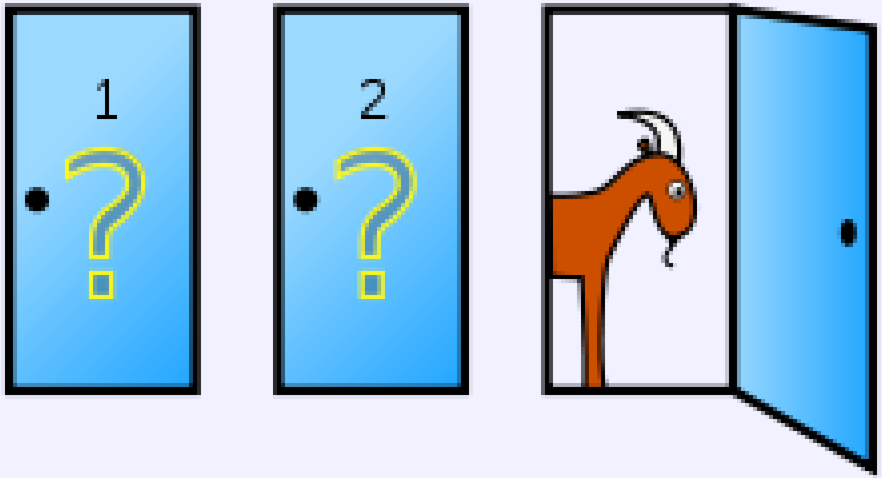
Задача №4. Выбрать дверь

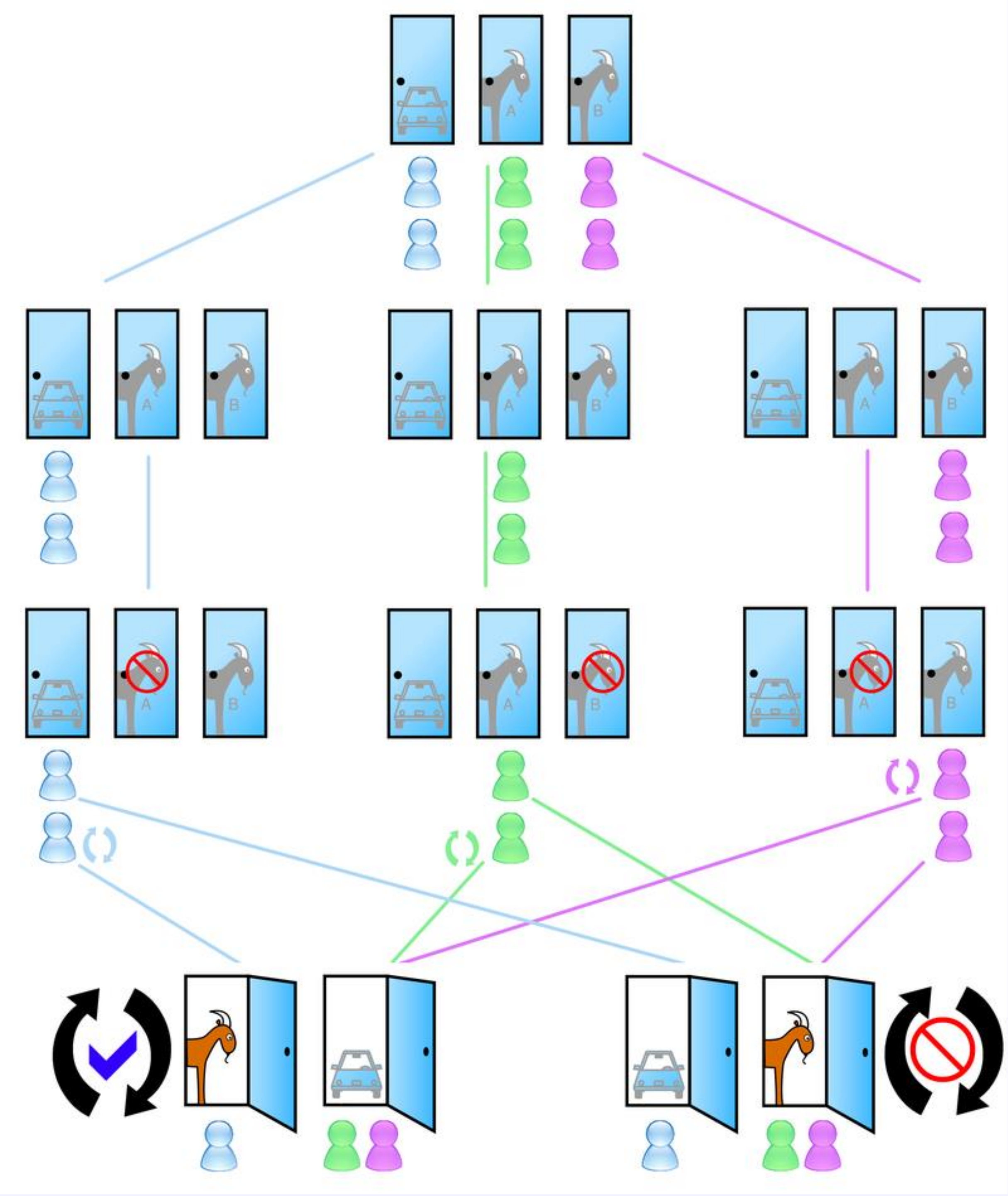
В одной игре ведущий предложил играющему угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Играющий наугад выбрал одну из дверей. После этого ведущий (зная, где на самом деле находится автомобиль) открыл одну из двух других дверей, за которой не было автомобиля. Далее ведущий предложил играющему две возможности: изменить своё решение и выбрать другую закрытую дверь, или же по-прежнему настаивать на первоначально выбранной двери. Как лучше поступить играющему?

Парадокс Монти Холла

Парадокс Монти Холла — одна из известных задач теории вероятностей, решение которой, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу. Эта задача не является парадоксом, так как не содержит в себе противоречия.

Задача впервые была опубликована (вместе с решением) в 1975 году в журнале «The American Statistician» профессором Калифорнийского университета Стивом Селвином. Она стала популярной после появления в журнале «Parade» в 1990 году.





Задача №4. Выбрать дверь

Решение: Вероятность того, что автомобиль находится за первоначально указанной дверью, равна 1/3. Так что настаивая на первоначально выбранной двери, играющий может надеяться на удачу лишь с вероятностью 1/3. Автомобиль находится за одной из двух невыбранных дверей с вероятностью 2/3. После того как ведущий откроет одну из этих дверей, вся эта вероятность «достанется» оставшейся невыбранной двери. Поэтому за ней автомобиль находится с большей вероятностью, чем за первоначально выбранной.

Блиц-задача

ВСЕ ХОТЯТ ЗАЧЁТ

На зачёт пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу зачёта?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

После того как все студенты получат оценку, придёт инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранён от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?

Задача VI Олимпиады мегаполисов
Автор Денис Афризонов

Художник Елена Цветаева

Всё хотят зачет

На экзамен пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задает каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку “сдал” к концу экзамена?» В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: “сдал” или “не сдал”.

После того, как все студенты получат оценку, придет инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку “не сдал”. Если хотя бы один такой студент найдется, то преподаватель будет отстранен от работы, а оценки всех студентов заменят на “сдал”. В противном случае никаких изменений не произойдет. Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку “сдал”?

Всё хотят зачет

Решение:

Каждый должен назвать число, количество тех, кто уже получил оценку «сдал» + количество, ещё не отвечавших студентов. Тогда либо все сдали, либо последний, кто не сдал, верно назвал итоговое число сдавших.

Восьмое занятие.
Теория вероятностей

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Задание. Монету подбросили 2 раза. Вычислите вероятность, что выпадет 2 решки.

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Задание. Вычислите вероятность, что при бросании двух костей выпадет 8 очков.

Теория вероятностей

Определение. ***Вероятностью*** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{\text{количество благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

Вероятность любого события заключена *между нулём и единицей*. Вероятность равна нулю, если благоприятных исходов нет вовсе (*невозможное событие*). Вероятность равна единице, если все исходы благоприятны (*достоверное событие*).

Пусть у нас есть колода карт, и мы достаем из неё одну карту.

Достоверное событие – мы вытащили любую карту любой масти.

Невозможное событие – мы вытащили проездной на метро.

Случайное событие – мы вытащили туза.

Теория вероятностей

Упражнение. Какие (случайными, достоверными или невозможными) являются следующие события:

1. Два попадания при трех выстрелах.
2. Появление не более 18 очков при бросании трех игральных костей.
3. Наугад выбранное трехзначное число не больше 1000.
4. Появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м.
5. Появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр.

Множества элементарных исходов

Допустим при бросании игральной кости нас интересует появление определенного числа очков.

Выпадение конкретного числа очков i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) мы называем *элементарным исходом* (e_i).

Осуществление одного элементарного события в качестве результата испытания, исключает другие.

При бросании игральной кости непременно произойдет одно из элементарных событий:

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$$

Все элементарные исходы образуют *множество (пространство) элементарных исходов E*. E – достоверное событие.

Операции над событиями

По мишени произведено 4 выстрела. Рассмотрим события:

A_0 – попаданий нет

A_1 – одно попадание

A_2 – два попадания

A_3 – три попадания

A – не больше трех попаданий

Заметим, что $A_0 \subset A,\ A_1 \subset A,\ A_2 \subset A,\ A_3 \subset A$

При этом событие A не содержит никаких других событий кроме A_0, A_1, A_2, A_3

Операции над событиями

Определение. *Суммой событий* A_1, A_2, A_3, …, A_n называется событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, …, A_n (или A_1, или A_2, или A_3, …, или A_n, или несколько из них, или все)

Упражнение. Событие A – лотерейный выигрыш 100 рублей

Событие B – лотерейный выигрыш 200 рублей

Событие C – лотерейный выигрыш 250 рублей

В чем состоит событие A+B+C?

Операции над событиями

Произвольно выбираем два двухзначных числа.

A – выбранные числа кратны 2

B – выбранные числа кратны 3

C – выбранные числа кратны 6

Заметим, что событие C происходит, если одновременно происходят события A и B. Если одно из событий не произойдет, то не произойдет и C. Такое событие C принято называть *произведением* событий A и B.

Операции над событиями

Определение. *Произведением событий* A_1, A_2, A_3, …, A_n называется событие A, состоящее в одновременном исполнении всех событий (и A_1, и A_2, и A_3, …, и A_n) A_1, A_2, A_3, …, A_n.

A – входящий в подъезд человек – мужчина

B - входящий в подъезд человек светловолосый

C - входящий в подъезд человек – светловолосый мужчина

C = A*B

Несовместные события

Рассмотрим события:

A – выпадение орла при первом бросании монеты

B – выпадение решки при первом бросании монеты

Заметим, что совместное осуществление этих событий невозможно

Определение. Два события A и B, произведение которых – невозможное событие, называются *несовместными событиями*.

Несовместные события: $A \cap B = \emptyset$ (пустое множество) — события A и B не могут произойти одновременно.

Противоположные события

Определение. Если сумма событий А и В – достоверное событие, а произведение – невозможное событие, события А и В называются *противоположными*.

$$B = \overline{A} \text{ или } A = \overline{B}$$

Вероятность суммы несовместных событий

Если А и В несовместны, формула сложения вероятностей : **P(A+B) = P(A) + P(B)**

(несовместные = события А и В не могут произойти одновременно)

Задача. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлены: 10 выигрышей по 200 рублей (А3), 100 – по 100 рублей (А2), 500 – по 25 рублей (А1) и 1000 выигрышей – по 5 рублей. Федя купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 25 рублей?

Школьный экзамен

На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Как долго прослужит сканер?

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Вероятность суммы совместных событий

Формула сложения вероятностей: P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Задача. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность выпадения хотя бы одного орла?

Бросаем кубик

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

P(A) = 1/6 = P(B)

P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 1/6 + 1/6 – 1/36 = **11/36**

На экзамене

На экзамене есть 25 вопросов, случайным образом выбираются два из них. Какова вероятность
c) не получить вопрос №25?

Доказать равенство

A, B, C – совместимые события. Доказать:

$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Условные вероятности

Из ящика в котором 5 белых и 6 черных шаров, наугад вынимаются последовательно один за другим два шара.

A – первый шар белый

B – второй шар белый

Понятно, что $P(A) = \frac{5}{11}$

Какова вероятность события B, если A произошло?

P(B/A) = 4/10

Какова вероятность события B, если A не произошло?

P(B/$\bar{A}$) = 5/10

Условные вероятности

Мы столкнулись с ситуацией, когда вероятность события В зависит от того произошло или не произошло А.

В таком случае говорим, что событие В зависит от события А, а вероятность появления события В *условная.*

Условная вероятность появления события В, если событие А произошло, будем обозначать **Р(В/А).**

Условные вероятности

Пусть из n равновозможных событий A_1, A_2, A_3, …, A_n составляющих полную группу (полная группа событий – это совокупность единственно возможных событий при данном испытании):

Событию A благоприятствует m событий

Событию B благоприятствует k событий

Событию AB благоприятствует r событий

$r \leq k, r \leq m$

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Условные вероятности

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

a белых и b черных шаров

Из ящика в котором a белых и b черных шаров, наугад вынимаются последовательно один за другим два шара. Какова вероятность, что они оба белые?

В трамвайном парке

В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Снова колода карт

Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают 2 карты. Найти вероятность того, что:

а) достали 2 вальта

б) достали 2 карты пиковой масти

в) достали вальта и даму

Вероятность произведения независимых событий

Событие В называется ***независимым*** от А, если его вероятность не зависит от того, произошло или не произошло событие А.

$$\boldsymbol{P(B/A) = P(B)}$$

В случае независимости события В от события А из ранее установленной формулы получим:

$$\boldsymbol{P(AB) = P(B) \cdot P(A)}$$

Вероятность произведения двух *независимых* событий равна произведению вероятностей этих событий.

Снова бросаем кости

Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй пяти очков?

Три независимых события

A, B, C – совместимые и независимые события.
Доказать, что $\mathrm{P}(\mathrm{ABC}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{C})$

Вероятность произведения независимых событий

Рассмотрение этого примера подводит к обобщению правила умножения вероятностей для произвольного числа событий. В случае независимости событий соответствующая формула принимает вид:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ \ldots \cdot P(A_n)$$

Три монеты

Подбрасывают три монеты. Найти вероятность выпадения орлов на всех трех монетах.

Спасибо за внимание!

Совсем скоро презентация и домашнее задание появятся на гугл-диске и на сайте)
Домашнее задание присылайте на почту - info@oxbridge.ru
В теме письма указывайте фамилию, предмет и номер группы
Не забудьте отправить ДЗ не позднее, чем за 2 дня до начала следующего занятия (до четверга включительно)

Хороших выходных!

Использованные материалы

- В.С. Лютикас, "Школьнику о теории вероятностей»
- Г.И. Фалин, “Статистический эксперимент де Бюффона” (лекция для участников финального тура IX Олимпиады по теории вероятностей, 20 февраля 2016 г.)
- Архив занятий Малого Мехмата МГУ http://mmmf.msu.ru/archive/
- Задачи с сайта https://problems.ru/
- А. Шень, “Вероятность: примеры и задачи”
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монти_Холла
- Архив журнала «Квантик»