

# КРУЖОК ПО МАТЕМАТИКЕ. ЗАНЯТИЕ 6.

# Вероятность: определение и свойства

- $P(A) = m/n$ , где  $n$  — общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а  $m$  — количество элементарных исходов, благоприятствующих событию  $A$ .  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- Вероятность достоверного события равна единице.
- Вероятность невозможного события равна нулю.
- Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

# Вероятность: определение и свойства

## Свойства вероятностей.

1)  $P(\emptyset) = 0$ ;  $P(\Omega) = 1$ ;

2)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;

3) Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ;

4)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

# Разбор ДЗ

- Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:  $S = \{\text{выпало не больше двух «гербов»}\}$ .
- Петя, Вика, Катя, Игорь, Антон, Полина бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет мальчик.

# Разбор ДЗ

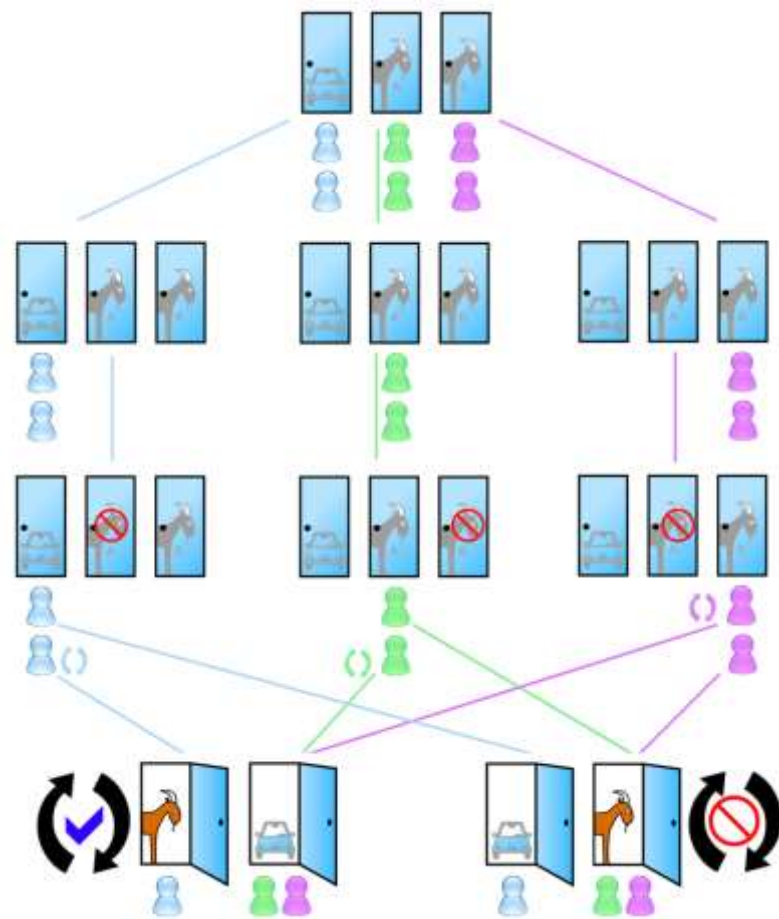
- В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен не из России.
- В ящике лежат гелевые ручки: 8 синих, 6 красных и 32 зеленых. Надя достает случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну красную ручки?

# Парадокс Монти Холла

- Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

# Парадокс Монти Холла

- Для стратегии выигрыша важно следующее: если вы меняете выбор двери после действий ведущего, то вы выигрываете, если изначально выбрали проигрышную дверь. Это произойдёт с вероятностью  $2/3$ , так как изначально выбрать проигрышную дверь можно 2 способами из 3.



# Парадокс Монти Холла

- Ещё более наглядной ситуация с дверями становится, если представить что дверей не 3, а, скажем 1000, и после выбора игрока ведущий убирает 998 лишних, оставляя 2 двери: ту, которую выбрал игрок и ещё одну. Представляется более очевидным, что вероятности нахождения приза за этими дверьми различны, и не равны  $\frac{1}{2}$ . Если мы меняем дверь, то проигрываем только в том случае, если с самого начала выбрали призовую дверь, вероятность чего 1:1000. Выигрываем же мы при смене двери в том случае, если наш изначальный выбор был неправильным, а вероятность этого — 999 из 1000.



# Геометрическое определение вероятности

**Определение 2.1.** Вероятность события  $A$  равна отношению объема множества  $A$  к объему всего пространства  $\Omega$  :

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}.$$

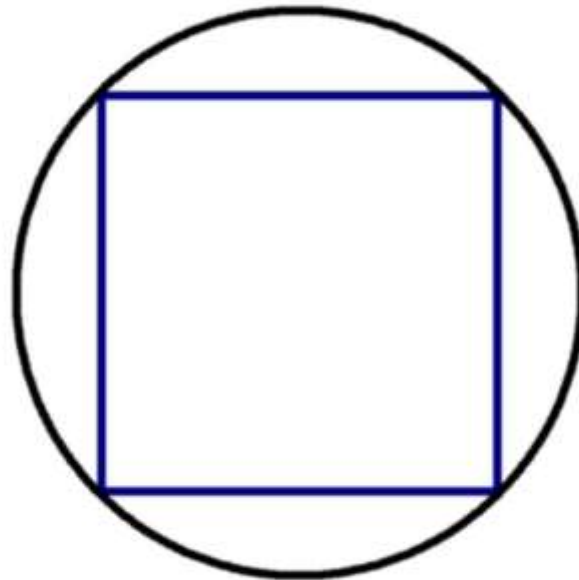
Если  $\Omega$  — ограниченное множество на плоскости, имеющее положительную площадь  $S(\Omega)$ , то  $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$ . Если множество  $\Omega$  расположено на прямой, то  $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$ , где  $L(\Omega)$  — длина  $\Omega$ .

# Задача

- На отрезок  $OA$  длины  $L$  наудачу поставлена точка  $B$ . Найти вероятность того, что меньший из отрезков  $OB$  и  $BA$  имеет длину, большую чем  $L/3$ .
- Вася и Маша условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым наудачу в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

# Задачи

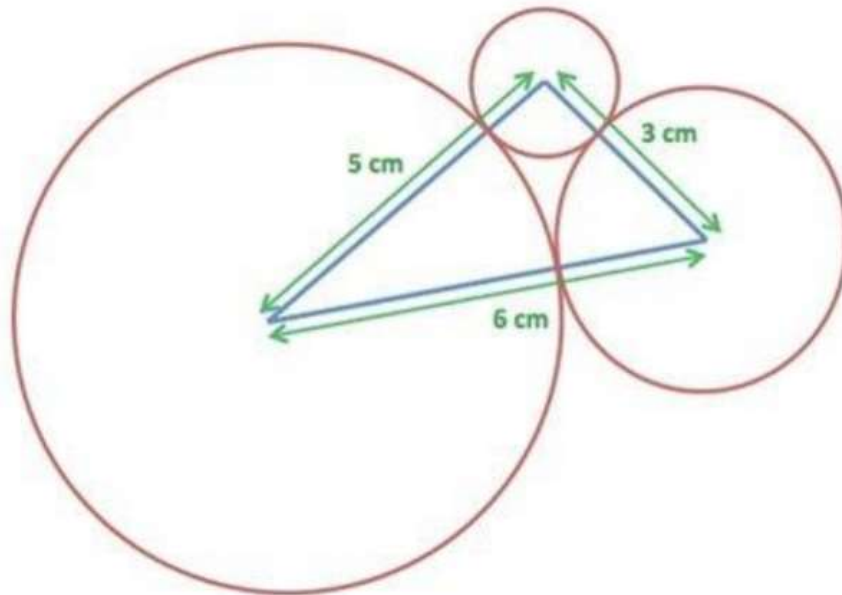
- В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.



# Геометрия, но без вероятностей

A triangle has lengths of 5cm, 6cm and 3cm.

Circles are drawn at each of the vertices of the triangle so that each circle just touches the other two circles. Find the three radii of the three circles.



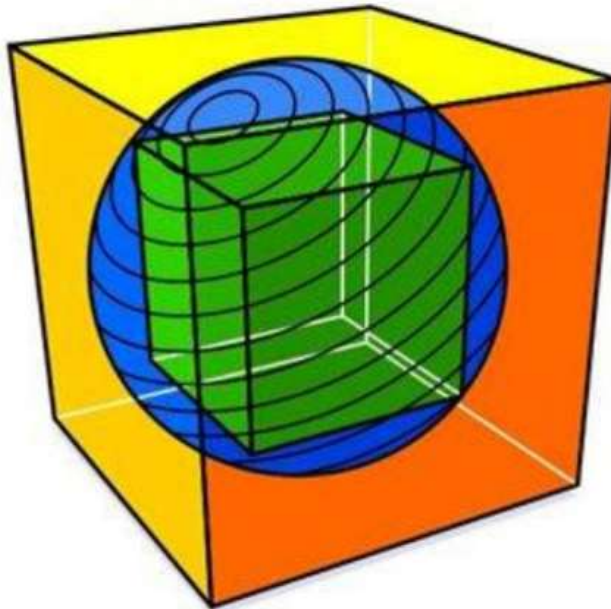
What if the original triangle had lengths of  $a$ ,  $b$  and  $c$  ?

Don't just solve this problem: look for the most elegant way to go about solving it.

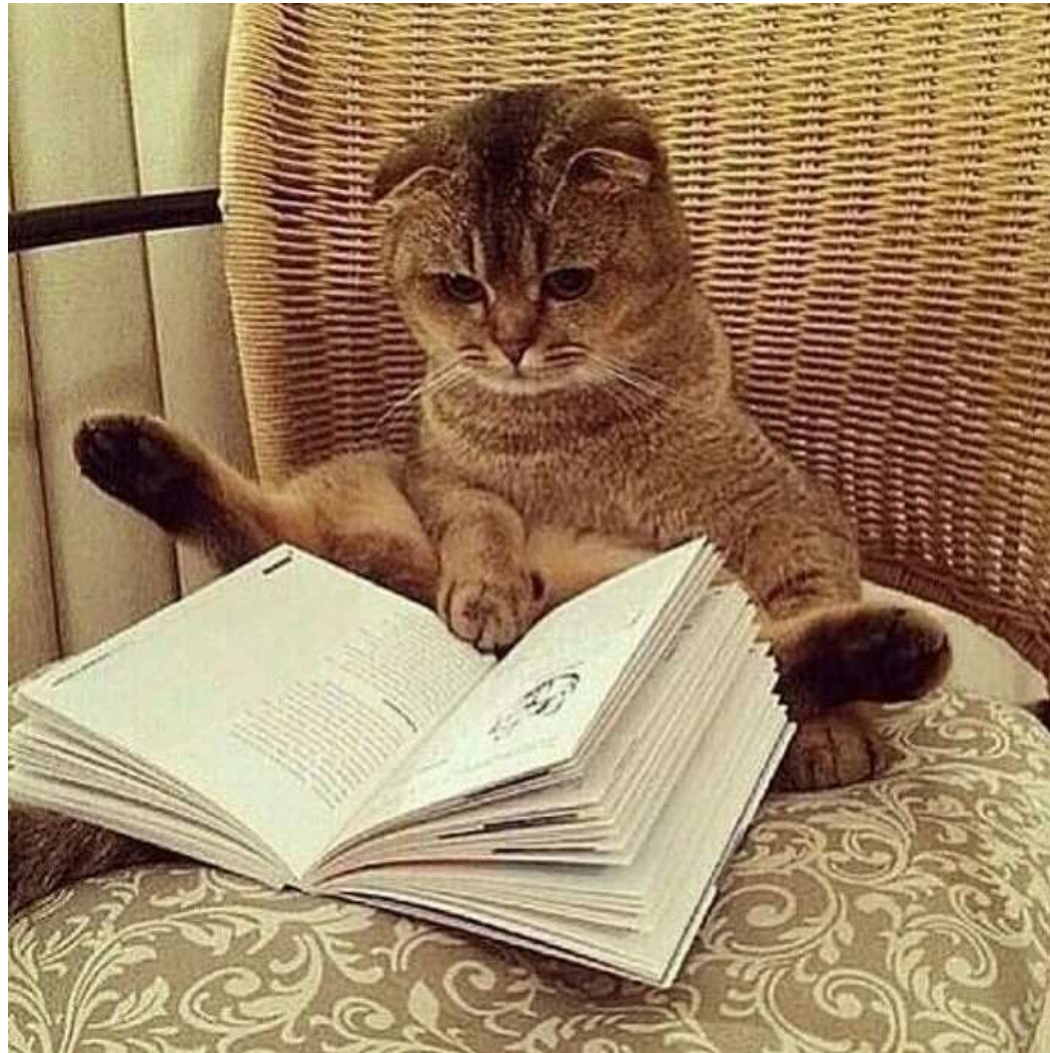
# Геометрия, но без вероятностей

## Challenge 10: Spheres and Cubes

A cube sits in a sphere which just touches the eight corners of the cube. The sphere is itself sitting in a cube which just touches the edges of the sphere. How many times larger is the volume of the larger cube than the volume of the smaller cube?



# Спасибо за внимание!



# Использованные материалы:

- Мастерков Ю.В. Теория вероятностей; примеры и задачи
- Подборки «Альбиона»
- Кружок Малого Мехмата
- Skysmart