Комбинаторика

Задачи про подсчёт числа разных вариантов и комбинаций с установленными ограничениями

- Правило произведения
- Число перестановок, размещений, сочетаний
- Приёмы для подсчёта объектов

Правило произведения

1. В классе 23 ученика.
   a. Сколькими способами им можно расставить оценки за четверть?
   b. Сколькими способами можно назначить старосту и двух заместителей?
2. Номер автомобиля состоит из 3 букв (используются 12 букв) и 3 цифры. Сколько существует различных номеров?
3. Назовём число симпатичным, если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует четырёхзначных симпатичных чисел?
4. Доказать, что число перестановок равно $n!$

Правило произведения

СТРОКА
ТРОКА
РОКА
ОКА
КА
А

1. Сколькими способами можно прочитать слово “строка”, двигаясь вправо-вниз?
1. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?
2. Сколько существует различных игральных кубиков?
3. (*) Прямоугольный параллелепипед размером m*n*k разбит на единичные кубики. Сколько всего образовалось параллелепипедов (включая исходный)?

Число размещений/сочетаний

1. Сколькими способами можно выбрать четырех человек на четыре различные должности, если имеется девять кандидатов на эти должности?
2. [BMO-2000-r1-5] The seven dwarfs decide to form four teams to compete in the Millennium Quiz. Of course, the sizes of the teams will not all be equal. For instance, one team might consist of Doc alone, one of Dopey alone, one of Sleepy, Happy & Grumpy, and one of Bashful & Sneezy. In how many ways can the four teams be made up? (The order of the teams or of the dwarfs within the teams does not matter, but each dwarf must be in exactly one of the teams.) Suppose Snow-White agreed to take part as well. In how many ways could the four teams then be formed?
3. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?
4. В обыкновенном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержал бы набор домино, если бы значения, указанные на косточках, изменялись не от 0 до 6, а от 0 до 12?

Число размещений/сочетаний

1. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Скольками способами можно составить комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик?
2. В столовой продаются пирожки с мясом, с картошкой, с капустой и с яблоком. У Васи хватает денег на любые 10 пирожков. Сколько разных комбинаций пирожков он может купить?
3. Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?
4. Даны 4 попарно различных кружки, 4 неотличимых друг от друга стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 соломинок всех цветов радуги. Сколькими способами можно разложить
   a. соломинки по чашкам
   b. сарах по чашкам
   c. сахар по стаканам
   d. соломинки по стаканам

Формулы про число сочетаний

1. Доказать, что
   a. $C(n, m) = C(n, n - m)$
   b. $C(n, m - 1) + C(n, m) = C(n + 1, m)$ (свойство треугольника Паскаля)
   c. $C(n, 0) + C(n, 1) + \ldots + C(n, n) = 2^n$
   d. $C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - C(n, 3) + \ldots + (-1)^n \cdot C(n, n) = 0$
   e. (*) $C(n, k) \cdot C(n - k, m - k) = C(m, k) \cdot C(n, m)$
   f. (*) $C(n, 0)^2 + \ldots + C(n, n)^2 = C(2 \cdot n, n)$
2. Доказать, что $(a + b)^n = C(n, 0) \cdot a^n + C(n, 1) \cdot a^{(n-1)} \cdot b + \ldots + C(n, n) \cdot b^n$

Олимпиадные задачи

1. В языке племени АУ две буквы – "а" и "у". Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не меньше одной и не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.
2. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 хордами, не имеющими общих концов и непересекающихся. Сколькими способами это можно сделать?
3. [bmo-2016-r1-1] The integers 1, 2, 3, …, 2016 are written down in the base 10, each appearing exactly once. Each of the digits from 0 to 9 appears many times in the list. How many of the digits in the list are odd? For example, 8 odd digits appear in the list 1, 2, 3, …, 11
4. [bmo-2014-r1-3] A hotel has ten rooms along each side of a corridor. An olympiad team leader wishes to book seven rooms on the corridor so that no two reserved rooms on the same side of the corridor are adjacent. In how many ways can this be done?